BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ACV2221
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/19/88 R/DT 07/19/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 03021604
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B37936
035/2: : |a (CaOTULAS)160647715
040: : |c MiU |d MiU
050/1:0 : |a QA468 |b .H6
100:1 : |a Hippauf, Hermann.
245:00: |a Lösung des Problems der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis.
260: : |a Leipzig, |b B. G. Teubner, |c 1872.
300/1: : |a [3]-32 p. |b 2 fold. pl. |c 21 cm.
500/1: : |a Cover-title.
502/2: : |a Inaug.-diss.--Jena.
650/1: 0: |a Trisection of angle
998: : |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

LÖSUNG

DES

PROBLEMS DER TRISECTION

MITTELST

DER CONCHOIDE AUF CIRCULARER BASIS.

VON

Dr. H. HIPPAUF,

RECTOR DER MITTLEREN BÜRGERSCHULE ZU HALBERSTADT.

MIT ZWEI LITHOGR. TAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1872.

Vorwort.

Hat die Beschäftigung mit einem Problem für den nach dem Grund der Schwierigkeit seiner Lösung Forschenden an sich etwas Reizvolles, so erscheint der Versuch zur Lösung einer Aufgabe, wie die der Trisection durch geometrische Construction, welche schon seit zwei Jahrtausenden das lebhafteste Interesse der Jünger der mathematischen Wissenschaft erregt, ohne trotz der umfassendsten Anstrengungen zu erschöpfendem Abschluss gelangt zu sein, gleichwohl sehr gewagt; doch hofft der unterzeichnete Bearbeiter dieses Themas sein Wagniss durch das hier gebotene Resultat rechtfertigen zu können.

Wenn das Problem der Trisection bei dem gegenwärtigen Standpunkt der mathematischen Wissenschaft zunächst nur ein mehr historisches Interesse hat, so ist der Lösung desselben von jeher eine Bedeutung beigelegt worden, die nicht nur Huygens in dem Anfang zu der Schrift: „de circuli magnitudine inventa“ mit den Worten anerkennt: „et haec construendi ratio (per trisectionem anguli scil.) quodammodo simplicissima videtur atque ad usum maxime accommodata,“ sondern welcher auch Newton Rechnung trägt, wenn er die Conchoide des Nikomedes, also die auf gerader Basis, zur geometrischen Auflösung der Gleichungen des 3. und 4. Grades: „de aequationum constructione lineari,“ (in Arithm. univ. p. 115 ss.) besonders geeignet erachtet und gebraucht.

Von allen bis jetzt bekannten Lösungen des Problems der Trisection scheint indess noch keine als ausschliesslich richtig und abschliessend wahr anerkannt worden zu sein, ob auch derjenigen, welche auf der Ermittelung der Schnittpunkte eines

Kreises mit einer gleichseitigen Hyperbel beruht, vor andern der Vorzug gegeben wird.

Für keine aber der bisher zur Trisection verwendeten Linien höherer Ordnung: Hyperbel so wenig als Parabel und Conchoide auf gerader Basis u. a., für keine der bisher gefundenen Lösungsmethoden ist deren innere Nothwendigkeit und Ausschliesslichkeit überzeugend nachgewiesen.

Für den Vorzug der gleichseitigen Hyperbel als einer Curve zweiten Grades ist deren leichte Construction nicht Grund genug, wenn eine andere Curve höheren Grades, zumal durch eine höchst einfache Polargleichung definirt, noch leichter construirbar ist als jene.

So löste Newton mittelst der Conchoide auf gerader Basis, wie schon erwähnt, Gleichungen vom dritten und vierten Grade geometrisch auf und wählte diese Curve, weil sie in Absicht der Construction nach dem Kreise die einfachste unter allen krummen Linien ist, wenngleich, algebraisch betrachtet, von einem höheren Grade als die Kegelschnitte.

Wichtiger aber als die leichtere Construirbarkeit der zur Lösung des Problems zu verwendenden Curve und vollkommen entscheidend müsse der Nachweis sein: dass in ihr das Wesen der Trisection ganz und gar Ausprägung und Gestalt gewinne, also, dass alle Punkte der Curve in ihrer Aufeinanderfolge lediglich als Wirkungen ausgeführter Massen-Trisections-Constructionen sich erweisen, d. h. dass alle Trisectionen in ihr liegen und sich durch sie darstellen und lösen lassen.

Inwiefern die von mir angewandte Conchoide auf circularer Basis mit dem Radius derselben als Intervall diesen Vorzug vor allen andern Curven zur Lösung der Trisection habe und die eigentliche Trisections-Curve κατ' ἐξοχήν sei, welche alle Winkel- und Bogen-Trisectionen ohne Ausnahme löse, soll in Folgendem nachgewiesen werden.

Halberstadt 1871. **H. Hippauf.**

Inhalts-Uebersicht.

Seite

Vorwort 3
Geschichtliche Einleitung 7
Grund der Schwierigkeit des Problems 9
Massen-Construction und deren Ergebniss 13
Gleichung der Conchoide auf circularer Basis 15
Construction und Beweis der Trisection hohler Winkel 17
Trisection erhabner Winkel 19
Trisection der ganzen Peripherie 20
Trisection grösserer und grösster Winkelräume resp. mehrfacher Peripherien ad infinitum 21
Beschreibung des Trisections-Curven-Zirkels 24
Handhabung desselben 26
Ersatzmittel für den Trisections-Curven-Zirkel 28
Anhang: Aufgaben, deren Lösung nur mittelst der Trisection möglich 30

Geschichtliche Einleitung.

Alle Versuche, einen beliebigen Winkel oder Kreisbogen durch geometrische Construction in drei gleiche Theile zu zerlegen, haben dargethan, dass die Lösung dieses Problems die Kräfte der Geometrie der geraden Linie und des Kreises übersteige.

Die von Nikomedes zunächst zur Lösung des delischen Problems erdachte Conchoide diente demselben auch zur Trisection.

Wiewohl seine Schrift darüber verloren gegangen und sein Verfahren uns unbekannt geblieben, hat Clavius (*Geometria practica.* Lugd. 1607. 4. p. 356) gelehrt, wie die Lösung mittelst der Conchoide auf gerader Basis geschehen könne. Ob sein Verfahren dasjenige des Nikomedes sei, ist dadurch natürlich nicht erwiesen. Nach ihm ist für jeden Winkel eine besondere Conchoide zu construiren; diese Lösung ist so umständlich als unzureichend: sie ist keine allgemeine und vollkommene.

Pappus hat zuerst die Hyperbel für die in Rede stehende Aufgabe anzuwenden gelehrt; doch ist auch diese Curve für jeden gegebenen Fall besonders zu berechnen und zu construiren. Eine derartige Lösung bringt: Chasles in einer Abhandlung der *comptes rendus* (24. Dec. 1855).

Andere haben sich der Parabel bedient, doch ohne irgend wesentlichen Erfolg. Zur Theilung eines Winkels nach einem gegebenen Verhältniss soll Dinostratus, nach Montucla's Vermuthung aber Hippias von Elis die Quadratrix erfunden haben.

Montucla zeigt, wie man sich zum Zweck rein mechanischer Lösung eines blossen Lineals bedienen könne. Das Instrument des Jesuiten Thomas Ceva, bestehend aus 4 Linealen, die einen beweglichen Rhombus bilden, löst die Aufgabe durch mechanische Verschiebung der Lineale bis zu bestimmten Punkten und basirt hinsichtlich der Construction und Beweisführung auf derjenigen, der praktischen Ausführbarkeit entbehrenden, darum nur angedeuteten Lösung der Platonischen Schule, (Montucla. Th. I. p. 177) auf welche auch Vieta (*Supplementum Geometriae.* Prop. IX) und Newton *(Arithm. univers.)* die Trisection des Winkels gegründet haben.*)

Sind dergleichen Instrumente überhaupt von keinem praktischen Nutzen, so sei auch hier von vornherein bemerkt, dass ein zur leichteren Zeichnung der unten erwähnten Trisections-Curve besonders construirtes, einfaches Instrument nur als Hilfs-, nicht aber als Beweismittel in Betracht kommen soll, da die Natur und das Wesen der betreffenden Curve aus deren höchst einfacher Polargleichung vollständig erkannt und durch dieselbe bestimmt wird.

*) Vergl. Klügel. Mathematisches Wörterbuch. Th. V. S. 343 ff.

Lösung des Problems der Trisection.

Die Hauptschwierigkeit der Lösung des Problems der Trisection liegt offenbar darin, dass der natürlichste Anhalt, d. i. die Sehne des zu theilenden Bogens durch die Radien, welche den Winkel in drei gleiche Theile zerlegen, in solchen Punkten geschnitten wird, die sich vor ausgeführter Trisection bisher nicht ermitteln und für dieselbe verwerthen liessen.

In der That fusst auch keine der bisher versuchten Lösungsmethoden auf der Sehne des zu trisecirenden Bogens.

Fassen wir die Schwierigkeiten, welche sich gerade ihrer Verwendung bei Lösung unsrer Aufgabe entgegenstellen, näher in's Auge.

Schneidet man auf einer Kreislinie drei gleich grosse Bogenstücke ab, zieht dazu die Radien, die Sehne jedes einzelnen Bogenstückes und des ganzen Bogens, so entstehen drei congruente Dreiecke, und die Sehne des ganzen Bogens wird, falls derselbe kleiner als der Halbkreis ist, also einem Winkel unter 180^0 zugehört, durch die beiden inneren Radien, welche den ganzen Bogenwinkel in drei gleiche Winkel zerlegen, zwar auch in drei Stücke geschnitten, deren beide äussere jedoch, wiewohl einander und der Drittelbogen-Sehne gleich, grösser sind als das innere oder Mittelstück. (Vergl. Figur 1.)

Der Beweis ist aus der Figur ersichtlich.

Für einen grösseren Bogen als den hier gewählten: AB nähert sich die Sehne mit ihrem Mittelpunkt dem Centrum, bis sie für den gestreckten Winkel oder für den Halbkreis mit dem Kreisdurchmesser zusammenfällt; für einen kleiner werdenden Bogen entfernt sich die Sehne in ihrem Mittelpunkt immer mehr vom Centrum, bis sie selbst, stets kleiner werdend, für den Nullwinkel mit der Peripherie im Endpunkt des Schenkels resp. Radius zusammenfallend, nur ein Punkt ist.

Je grösser der Bogen oder Winkel, welcher trisecirt ist, desto kleiner ist im Verhältniss zu den äusseren beiden Sehnen-

stücken das innere; für den Halbkreis ist es = 0, weil jedes äussere Sehnenstück = Radius, beide also = Durchmesser, d. i. gleich der ganzen Sehne.

Je kleiner der Bogen oder Winkel, desto geringer ist der Unterschied zwischen den äusseren Sehnenstücken und dem inneren; für den Winkel von 0^0 ist die ganze Sehne nur ein Punkt, jeder Theil also = 0.

Hieraus folgt, dass das Mittelstück der ganzen Bogensehne von einem Winkel von 0^0 bis 180^0 eine von einem Punkt*) bis zu einem Maximum**) wachsende und dann wieder bis zu einem Punkt***) herab fallende Dimension hat, sonach eine variable Grösse ist, welche in keinem analogen Verhältnisse zum ganzen Bogen oder zur ganzen Sehne und deren äusseren Stücken steht, welche letztere mit dem Bogen oder Winkel gleichmässig wachsen und abnehmen und immer gleich der Drittelbogen-Sehne sind.

Und doch ist die Sehne eines zu theilenden Bogens ein so wesentlicher Anhalt, dass man ihrer zumal für die Dreitheilung nicht entrathen kann, wenn anders man nicht auf ein ausschliesslich richtiges Resultat verzichten will.

Nur darum, weil das Verhältniss zwischen dem variablen Mittelstück und den äusseren Sehnenstücken sich bisher nicht fixiren oder ein Gesetz für das Zu- und Abnehmen dieser Dimension mittelst geometrischer Construction sich nicht nachweisen liess, galt die Aufgabe für ein so schwer zu lösendes Problem.

In Folgendem soll nachgewiesen werden, wie die Gesetzmässigkeit dieser fraglichen, variablen Dimension sich geometrisch darstellen und das Problem der Trisection durch geometrische Construction sich lösen lässt.

Zu dem Zwecke schlage ich einen Halbkreis und ziehe dessen Sehne, d. i. den Durchmesser. (Figur 2.)

Von dem einen Endpunkt A aus schneide ich auf der Peripherie drei gleiche Bogenstücke: $AD = DE = EB$ ab, welche zusammen den ganzen Bogen AB ausmachen, ziehe die Radien CD, CE und CB und die Sehne AB. Nun verbinde ich den andern Endpunkt des Kreisdurchmessers F mit E, welches

*) Peripheriepunkt. **) Bei 105 Grad. ***) Centrum.

das Bogendrittel EB von dem Zweidrittelbogen EA trennt. Der so entstandene Peripheriewinkel EFA ist als solcher gleich der Hälfte des Centriwinkels ECA, mit welchem er auf demselben Bogen AE steht, also gleich $\sphericalangle ACD$ oder gleich $^1/_3 \sphericalangle ACB$. Aus der Gleichheit und Lage der Winkel ACD und AFE folgt, dass FE und CD parallel sind.

Ziehe ich nun die Sehne des mittleren Bogendrittels ED, so ist dieselbe parallel mit der grossen Sehne AB, weil ihre Mittelpunkte mit dem Centrum in einer geraden Linie, im Radius CG liegen, welcher auf beiden Sehnen senkrecht steht. Den Halbirungspunkt der ganzen Sehne benennen wir mit M.

Noch verbinde ich F mit dem Endpunkt des ganzen Bogens B und ziehe durch den Halbirungspunkt H der so entstandenen Sehne FB den Radius CL, welcher natürlich, weil auf FB senkrecht stehend, parallel mit der Sehne AB sein muss, weil auch diese auf FB senkrecht steht. (Dreieck ABF rechtwinklig.)

Der Radius CL durchschneidet EF in dem Punkte K.

Aus der Parallelität der genannten Linien folgt, dass das Viereck $CDEK$ ein Parallelogramm ist, desgleichen auch das Viereck $CMBH$. Das erstere ist durch den Radius CE als Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt, welche zugleich auch gleichschenklig sind, weil CD, die Seite des Parallelogramms, ebenfalls Radius ist. Folglich ist auch die CD gegenüberliegende Seite EK gleich dem Radius und K also um Radiuslänge von dem Bogendrittelpunkt E entfernt.

Diese Dimension ist für alle Bogen- oder Winkel-Dreitheilungen eines und desselben Kreises constant, kann also nur mit der Grösse des Kreises, welchen man der Construction zu Grunde legt, ab- oder zunehmen; denn sie ist stets = Radius.

KC ist gleich ED (als gegenüberliegende Seite des Parallelogramms), ED als Drittelbogensehne gleich $BE = BN = AD = AO$. KC stellt also die Drittelbogensehne dar.

Das andere Parallelogramm $CMBH$ steht mit dem erstgenannten auf demselben Radius CL und hat mit jenem das Centrum C als gemeinschaftlichen Eckpunkt, um welchen beide Vierecke sich beim Wachsen oder Abnehmen des zu theilenden Bogens drehen. Die Punkte $C — K — H$ liegen, wie ersichtlich, für jede Construction dieser Art in einer geraden Linie.

Da CH gleich BM d. i. gleich der Hälfte der ganzen Bogensehne, als gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms, CK aber, wie oben bewiesen, gleich der Drittelbogensehne, darum auch gleich BN, gleich AO, so muss HK offenbar gleich NM, d. i. gleich der Hälfte des variablen Sehnen-Mittelstückes NO sein $\left(\frac{X}{2}\right)$.

Das Verhältniss der beiden Stücke CK und KH ist also identisch demjenigen der Theile von der Hälfte der ganzen Bogensehne. Sonach stellt CH durch seine Theilung in K das Verhältniss eines äusseren Sehnenstückes zur Hälfte des variablen inneren dar.

Dies gilt aber nur für Winkel von 0^0 bis 180^0, weil die Sehne für Winkel über 180^0 nicht mehr innerhalb des zugehörigen Winkels liegt, von den theilenden Radien also auch selbst nicht getheilt wird, darum von einem variablen Sehnen-Mittelstück nicht mehr die Rede sein kann.

Da man zu jedem beliebigen Bogen oder Winkel (zunächst unter 180^0; grössere kann man zuvor halbiren und die betreffende Construction an der Hälfte vornehmen) die Sehne und zu dieser eine Parallele durch das Centrum (den Radius CL in Figur 2) ohne Schwierigkeit ziehen kann, auch der Punkt H in dem Radius sich durch die Hülfs-Sehne BF sofort ergiebt, so kommt es für die Lösung des Problems nur darauf an, den Punkt K zu finden.

Für einen Winkel von 0^0 *(ACA)* steht der Radius, welcher zur Sehne parallel gezogen werden soll, senkrecht auf CA, weil die Parallele zugleich senkrecht auf der Halbirungslinie des zu theilenden Winkels steht, welche beim Nullwinkel mit den Schenkeln in eine Linie CA zusammenfällt. (Das Parallelogramm $CMBH$ in Figur 2 ist ein Rechteck.) Auch beide oben erwähnte Parallelogramme können aus demselben Grunde bei einem Winkel von 0^0 nicht entstehen. CK und KH sind hierbei in ihrer Summe, darum auch einzeln $= 0$, denn K und H fallen mit C zusammen.

Für einen Winkel von 180^0 fällt die Parallele (Radius CL) mit der Sehne und den Schenkeln zusammen; das variable Mittelstück ist, wie oben erwähnt, $= 0$, denn die äusseren Sehnenstücke sind je gleich dem Radius.

Für einen von 0^0 bis 180^0 wachsenden Winkel, oder für einen von einem Punkt bis zum Halbkreis sich erweiternden Bogen macht der mit der Sehne parallel liegende Radius*) seinen Weg innerhalb eines Quadranten, und dabei ändert sich die Lage der Punkte K und H derartig, dass beide von C gleichzeitig ausgehend, sich bis zu einem Maximum**) von einander entfernen, dann wieder näher zusammenrücken, bis sie in ihrer weitesten Entfernung von C, d. i. in F gleichzeitig eintreffen. Der geometrische Ort des Punktes H ist hierbei ein Halbkreis, weil CH in allen Fällen senkrecht auf FB steht, und das Dreieck CHF stets CF zur Basis hat. Nun fragt es sich, welche Linie der Punkt K auf seinem Wege von C bis F bei seiner variablen Entfernung von H beschreibt.

Zur Lösung dieser Frage benutzen wir das oben ermittelte Ergebniss: dass K stets um eine Radiuslänge von demjenigen Peripheriepunkte entfernt ist, welcher mit F und K in einer geraden Linie liegt; das ist der Drittelbogenpunkt E (Figur 2) und das andere Ergebniss: dass K vom Centrum stets um Drittelbogen-Sehnen-Dimension entfernt, dass KC also immer gleich der Drittelbogensehne des zu trisecirenden Bogens ist.

Ziehen wir in einem Halbkreise von einem Endpunkt F des Durchmessers nach der Peripherie eine Anzahl Strahlen und schneiden auf jedem Strahl von seinem in der Peripherie liegenden, dem Punkte F entgegengesetzten Endpunkte aus ein Stück ab, welches gleich dem Radius des Halbkreises ist, so bilden die so gefundenen Durchschnittspunkte: $K — K — K$ etc. (Figur 3) eine Curve, deren Natur schon durch die Lage der Punkte K gekennzeichnet ist. Der geometrische Ort des Punktes K, von C bis F durch die einzelnen Constructionen angedeutet, ist offenbar, soweit er bis jetzt, d. h. für Winkel von 0^0 bis 180^0 in Betracht kommt, eine Hälfte der inneren Conchoide auf circularer Basis mit deren Radius als Intervall.

Der Pol der Conchoide ist der Peripheriepunkt F, die Basis der Kreis, an welchem die Bogendreitheilung vorgenommen wird; als Intervall dient der Radius der Kreis-Basis.

---

*) CL in Figur 2. **) Vergl. Anmerk. **) auf p. 10.

Durch das bestimmte Intervall ist die Conchoide, deren volle Verwendung für die Trisection aller möglichen Fälle unten dargelegt wird, als eine besondere Art der von Roberval:

Limaçon de Pascal

genannten Conchoiden-Gattung gekennzeichnet.

Die Polargleichung derselben ist leicht zu entwickeln und die mechanische Construction mittelst eines am Schlusse beschriebenen einfachen, vom Verfasser ersonnenen Instrumentes leicht ausführbar.

Gleichung der Conchoide auf circularer Basis mit dem Radius als Intervall. (Figur 4.)

Ziehen wir vom Pol F der Conchoide, welche wir als schon fertig construirt betrachten und zur weiteren Construction in Brauch nehmen, eine beliebige Gerade, welche die innere Conchoide, die Kreisbasis und die äussere Conchoide beispielsweise in $K - D - Q$ schneidet, so ist nach der Natur der Conchoide $KD = DQ$ und, da das Intervall gleich dem Radius, $= r$. Die Entfernung des inneren Conchoidenpunktes K vom Pol F, also KF, bezeichnen wir mit x, die Entfernung des äusseren Conchoidenpunktes Q vom Pol, also QF, mit y. Letzteres ist offenbar $= x + 2r$.

Benennen wir noch den Winkel, welchen der betreffende Strahl QF mit der Abscissenaxe der Conchoide, d. i. mit dem Durchmesser der Kreisbasis resp. deren Verlängerung bildet, $\sphericalangle QFA$ oder DFA mit φ, so ist:

$$\cos \varphi = \frac{FD}{FA} = \frac{x + r}{2r}.$$

Also: $x + r = 2r \cos \varphi$ und $x = 2r \cos \varphi - r = r (2 \cos \varphi - 1)$.

Nehmen wir den Radius als Einheit an: $r = 1$, so ist: $x = 2 \cos \varphi - 1$ und $y = 2 \cos \varphi + 1$.

Aus jeder dieser beiden Gleichungen lässt sich der ganze Zug der inneren und äusseren Conchoide herleiten.

Wir stellen nunmehr folgende allgemeine Behauptung auf:

Diejenige Conchoide auf circularer Basis, deren sie beschreibende Linie als constante Ordinate gleich dem Radius des als Basis dienenden Kreises ist, stellt in der geraden Entfernung jedes ihrer Punkte, sowohl der inneren als der äusseren Conchoide, von dem Centrum des Kreises die Drittelbogen-Sehne desjenigen Winkels dar, welcher seinen Scheitel im Centrum des Kreises hat, dessen ein Schenkel in dem vom Pol der Conchoide aus gezogenen Durch-

messer des Kreises, in der Hälfte CA gelegen,*) und dessen ganze Bogensehne parallel jener Geraden ist, welche das Centrum mit dem betreffenden Conchoidenpunkte verbindet.

Ziehe ich also zu einem beliebigen Winkel, welcher die oben bezeichnete Lage innerhalb der Conchoide hat, die Sehne seines Bogens und zu dieser vom Centrum aus eine Parallele, so ist dieselbe in ihrer Länge vom Centrum bis zum Durchschnittspunkt der inneren bezügl. äusseren Conchoide genau gleich der Drittelbogen-Sehne des Winkels.

Verbindet man den Pol der Conchoide mit dem durch den gegebenen Winkel bedingten, durch die zur Sehne parallel gezogene Linie ermittelten Conchoidenpunkt und verlängert diese Gerade bis zum gegebenen Winkelbogen, so wird dieser im Verhältniss von 1 : 2 getheilt, d. h. trisecirt, denn der Strahl, welcher von F durch K geht, trifft nach der oben in Figur 2 ausgeführten Construction in seiner Verlängerung denjenigen Punkt des ganzen Bogens, welcher das zweite Drittel von dem dritten scheidet.**)

Es handelt sich nunmehr darum, die Richtigkeit der Behauptung:

„dass die Conchoide auf circularer Basis mit Radius-Intervall die Trisection in allgemeinster und vollkommener Weise löse, so dass sie vor allen andern Curven die ausschliesslich richtige und einzig wahre Trisections-Curve κατ' ἐξοχήν sei,“

in ihrem ganzen Umfange und ihrer Bedeutung nachzuweisen.

Der Beweis für die Trisection der Winkel von 0^0 bis 180^0 mittelst der einen Hälfte der inneren Conchoide ist zwar bereits indirect***) gegeben; wenn er hier nochmals, jedoch direct geführt wird, so geschieht dies, um darzuthun, dass jede Trisection irgend eines Winkels oder Bogens gleichzeitig auch diejenige seines Implementes vollziehe, sofern nämlich die zur Sehne Parallele in ihrer Dimension vom Centrum bis zur inneren Conchoide die Drittelbogen-Sehne eines Winkels unter resp. bis 180^0, in ihrer Verlängerung bis zur äusseren Conchoide die Drittelbogensehne des zugehörigen erhabenen Winkels darstellt.

---

*) mit CA sich deckend. **) Vergl. oben S. 11. ***) oben S. 13.

Construction und Beweis. (Figur 5.)

Wir bestimmen einen Bogen, welcher trisecirt werden soll, von dem Endpunkt A des Kreisdurchmessers aus: AB, ziehen dazu die Sehne und den Schenkel CB des zugehörigen Winkels ACB, halbiren den letztern durch CG, welches die Sehne in I halbirt, ziehen zur Sehne die Parallele CH vom Centrum aus, wodurch die innere Conchoide in K geschnitten wird, legen durch den Pol F und durch K eine Gerade, welche den Bogen AB in D trifft, ziehen den Radius CD und zu FD parallel den Radius CE, schliesslich noch die Linie ED als Sehne des Bogentheiles ED.

Beweis: Das Viereck $CEDK$ ist ein Parallelogramm, denn KD, welches nach der Natur der Conchoide auf circularer Basis den Abstand der inneren Conchoide von der Basis auf der aus dem Pol F gezogenen Geraden ($F — K — D — Q$) angiebt, ist nach der Voraussetzung und Bedingung gleich dem Radius und daher $= CE$, welches letztere zu jenem laut Construction parallel gezogen ist; folglich ist KC auch gleich und parallel DE. Da KC aber zur Sehne AB parallel gezogen, so sind auch AB und DE parallel.

Daraus folgt, dass der Radius CG, welcher den ganzen Winkel ACB und dessen Sehne AB halbirt, darum auf ihr senkrecht steht, auch auf DE senkrecht steht und dieses sowohl als den zugehörigen Bogen DE und den Winkel DCE ebenfalls halbirt.

Aus der Parallelität von FD und CE, sofern sie von dem Radius CD durchschnitten sind, folgt, dass der Winkel $CDF = DCE$ als Wechselwinkel.

Im gleichschenkligen*) Dreiecke CFD ist Winkel $CFD = CDF$, folglich Winkel CFD auch gleich Winkel DCE.

*) Dies gleichschenklige Dreieck, welches durch den Scheitelpunkt C oder das Centrum, durch den Pol der Conchoide und den jedesmaligen Zweidrittel-Bogenpunkt gebildet wird, ist für alle Trisections-Constructionen in Betracht zu ziehen.

Aus der Parallelität von FD und CE, durchschnitten von FA, folgt, dass Winkel $CFD = ACE$ als Gegenwinkel.

Hieraus ergiebt sich, dass auch Winkel $DCE = ACE$ ist.

Da oben bewiesen, dass Winkel DCE durch CG halbirt, so ist Winkel ACE natürlich doppelt so gross als Winkel GCE; also ist Winkel ACG durch CE im Verhältniss von 1:2 getheilt, d. h. trisecirt

Da nun Winkel ACG die Hälfte des ganzen Winkels ACB, so ist die andere Hälfte: Winkel BCG selbstverständlich durch CD in demselben Verhältniss getheilt, darum die Trisection des ganzen Winkels ACB vollzogen.

Die Seite DE des Parallelogramms $CEDK$ ist somit eine Drittelbogen-Sehne und weil $DE = CK$, so stellt dieses ebenfalls eine solche dar; sobald also K durch Schnitt der Conchoide und der zur Sehne Parallelen gefunden, ist CK unmittelbar zur Dreitheilung des ganzen Bogens zu verwenden.

Dieser Beweis gilt zunächst für die Trisection aller Winkel von 0^0 bis 180^0.

Der Bogen des gestreckten Winkels, also der Halbkreis wird durch den Abstand des Poles, welcher zugleich Durchschnittspunkt der inneren und äusseren Conchoide ist, vom Centrum, d. i. durch die Radiusdimension trisecirt*).

Die Sehne des Halbkreises fällt mit der aus dem Centrum zu ihr parallel zu ziehenden CK zusammen, denn K liegt in diesem Falle in F.

Winkel über 180^0 und bis zu 360^0 lassen sich nach erfolgter Halbirung ebenfalls mittelst der inneren Conchoide triseciren; es ist selbstverständlich, dass man die Construction von A aus nach der einen wie nach der andern Seite der Abscissenaxe vornehmen kann, weil die Conchoide zu letzterer symmetrisch liegt.

Legt man einen Winkel, welcher grösser als 2R, so an C, dass er durch CA halbirt wird, so lässt sich die Trisection des ganzen Winkels durch eine obere und untere, also durch eine Doppel-Construction vollziehen (zu beiden Seiten der Abscissenaxe).

Gleichwohl ist jeder erhabene Winkel, jeder Bogen, welcher grösser ist als der Halbkreis, auch direct und zwar mittelst der

*) Eine altbekannte Thatsache wird durch die Conchoide neu bestätigt.

äusseren Conchoide durch eine der obigen analoge Construction zu triseciren.

Um den Beweis dafür zu führen, nehmen wir z. B. den erhabenen Winkel ACB, welcher den hohlen Winkel ACB zu 4R ergänzt, als Grundlage der Construction an (Figur 5, punktirte Zeichnung).

Die Sehne des erhabenen Winkels ACB ist dieselbe wie die des hohlen Winkels ACB; darum ist die zur Sehne aus dem gemeinschaftlichen Scheitelpunkt (Centrum) gezogene Parallele auch für beide Winkel dieselbe und darf für den erhabenen Winkel nur gehörig, d. h. bis zum Durchschnitt der äusseren Conchoide verlängert werden.

Behauptung: CL (in Figur 5) ist gleich der Drittelbogen-Sehne des erhabenen Winkels ACB, also $= AM = MN = NB$.

Beweis: Ich ziehe durch den Conchoidenpunkt L und den Pol F eine Gerade, welche in ihrer Verlängerung den Bogen des erhabenen Winkels ACB in N schneidet.

$L — F — N$ ist analog dem Strahl $F — K — D$ in der Construction für die Dreitheilung des hohlen Winkels ACB; nur liegen die drei Punkte: Pol der Conchoide, Durchschnittspunkt derselben und der zur Sehne Parallelen, Zweidrittelbogen-Durchschnittspunkt, dort: $F — K — D$, hier: $L — F — N$ in anderer Reihenfolge, weil der Conchoiden-Durchschnittspunkt L der äusseren Conchoide angehört, also für den erhabenen Winkel ausserhalb der Kreisbasis liegt.

LN ist nach der Natur der Conchoide auf circularer Basis mit dem bedingten Intervall gleich dem Radius (wie oben KD = Radius). Zu LN ziehe ich vom Centrum resp. Scheitel aus den parallelen Radius $CM = LN$ und verbinde noch M mit N. Dadurch ist das Parallelogramm $CMNL$ entstanden. In demselben ist NM gleich und parallel CL, welches zufolge Construction parallel der Sehne AB; daher ist auch NM parallel zu AB.

Wird der ganze erhabene Winkel ACB durch CO halbirt, welches natürlich senkrecht auf der Sehne AB steht, darum eine Verlängerung von CG, der Halbirungslinie des hohlen Winkels ist, so muss CO auch senkrecht auf der zur ganzen Sehne AB Parallelen NM stehen und diese sowohl, als den zugehörigen Bogen NM halbiren. Verbinde ich nun noch N

mit C, so sind die Winkel LNC und NCM als Wechselwinkel, und im gleichschenkligen*) Dreieck CFN die Winkel CFN und CNF einander gleich.

Da aber der Winkel CNF derselbe ist wie der Winkel CNL, so sind die genannten Winkel alle einander gleich, darum auch Winkel CFN = Winkel NCM.

Aus der Parallelität der Linien LN und CM, durchschnitten von FA folgt, dass Winkel CFN = Winkel ACM als Gegenwinkel.

Hieraus ergiebt sich, dass auch Winkel NCM = Winkel ACM, also Sehne NM (= CL) = AM.

Da oben bewiesen, dass der Bogen NM, also auch der Winkel NCM durch CO halbirt, so ist Winkel OCM halb so gross als Winkel ACM, also Winkel ACO, welcher die Hälfte des erhabenen Winkels ACB ist, durch CM im Verhältniss von 1 : 2 getheilt, d. i. trisecirt.

Daraus folgt auch die Trisection der andern Hälfte des erhabenen Winkels durch CN, somit die Trisection des ganzen Winkels. Also ist CL = Sehne AM = MN = NB.

Da nun sowohl der hohle als auch der erhabene Winkel trisecirt worden, so stellt diese Doppellösung zugleich die Trisection des ganzen Winkelraumes von 4R und damit auch die der ganzen Peripherie dar. Die Summe eines so gefundenen Drittelbogens des hohlen und eines solchen des zugehörigen Implement-Winkels muss natürlich gleich dem dritten Theile der ganzen Peripherie sein, also:

Bogen $EA + AM = EM = {}^1/_3\ p$ (Peripherie).

Die Trisection der ganzen Kreislinie oder eines Winkels von 4R, welcher angemessen Vollwinkel zu nennen, lässt sich indessen direct durch diejenige Gerade vollziehen, welche vom Centrum als dem Scheitelpunkt parallel zu derjenigen Tangente des Kreises gezogen wird, die durch den Peripheriepunkt A bedingt ist (dieser Punkt A stellt nämlich die Sehne des Null- wie des Vollwinkels dar), und die äussere Conchoide in T (Figur 5, gestrichelte Zeichnung) schneidet.

$CT = VW = AW = AV$ = Sehne zu ${}^1/_3\ p$.

$CTVW$ ist das hier in Betracht kommende Parallelogramm und CFV das betreffende gleichschenklige*) Dreieck.

---

*) Vergl. die Anmerkung auf Seite 17.

Der Beweis ist analog dem vorigen.

Sonach ist durch Construction und Beweis dargethan, dass die Trisectionen aller Winkel von 0^0 bis 360^0 mittelst der „Conchoide auf circularer Basis mit Radius-Intervall“ durch die der jedesmaligen Sehne Parallele in ihrem Conchoiden-Durchschnittspunkt aufs einfachste und vollkommenste sich vollziehen lassen.

Wiewohl damit das Problem in abschliessender Weise gelöst erscheint, bleibt doch übrig, das Wesen unsrer Curve als einer Trisections-Curve κατ' ἐξοχήν auch in allen denjenigen Theilen derselben nachzuweisen, welche für die Dreitheilung aller Winkel von 0^0 bis 360^0 nicht in Betracht gekommen.

Zu dem Zwecke denken wir uns Bogen oder Winkelräume derartig wachsend, dass sie in den Anfang auf ihrem Kreislauf zurückkehrend mit Wiederholung ihre Bahn fortsetzen.

Solche Bogen, welche grösser als die einfache Peripherie sind, also zu Winkelräumen über 4R gehören, werden gleichwohl auf dieselbe Weise trisecirt, wie die oben behandelten Fälle. Darin zeigt unsere Conchoide eben die Vollkommenheit, von welcher wir oben gesprochen.

Wir bemerken bei solch fortgesetzten Constructionen, dass der betreffende Conchoidenpunkt (Durchschnittspunkt K der Conchoide und der zur Sehne Parallelen) nach Figur 5:

1) für einen Winkel von 2R im Pol der Conchoide, d. i.
F. im Durchgangspunkt F der inneren resp. äusseren Conchoide durch die Kreis-Basis,

2) für einen Winkel von 3R genau um Radiuslänge unter-
K'. halb des Poles in der die Abscissenaxe rechtwinklig schneidenden Ordinatenaxe ($m — n$) der Conchoide,

3) für einen Vollwinkel (4R) senkrecht unter dem Centrum
T. (bez. des Durchmessers) und 2 Radiuslängen vom Pol entfernt, ($FV = VT = r$)

4) für einen Winkelraum von 6R oder für $1^1/_2$ Peripherien
K''. im verlängerten Durchmesser, also in der Abscissenaxe und zwar drei Radiuslängen vom Pol entfernt,

5) für einen Winkelraum von 8R oder für 2 Peripherien
K,. senkrecht über dem Centrum (bez. des Durchmessers) und 2 Radiuslängen vom Pol entfernt, (T entsprechend)

6) für einen Winkelraum von 9R oder für $2^1/_4$ Peripherien
$K_{''}$. senkrecht über dem Pol in der Ordinatenaxe und um Radiuslänge von ihm entfernt, (K' entsprechend)
7) für einen Winkelraum von 10R oder für $2^1/_2$ Peripherien
F. wiederum im Pol der Conchoide selbst, und
8) für einen Winkelraum von 12R oder für 3 Peripherien
C. wieder im Anfangspunkte der Conchoide, d. i. im Centrum der Kreisbasis liegt,

so dass die Conchoide in sich selbst zurückkehrt.

Für noch weiter fortzusetzende Trisectionen wiederholt sich die Conchoide in's Unendliche und ist um ihrer wunderbaren Eigenschaft willen eine der merkwürdigsten mathematischen Linien, die das Epitheton „mirabilis“ mit gleichem Rechte führen dürfte, wie die von Bernoulli ihrer eigenthümlichen Natur wegen: „spira mirabilis“ genannte logarithmische Spirale.

Dass die vorstehende Lösung des Problems der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis eine ganz allgemeine und erschöpfende sei, indem sie sich bei jedem Bogen oder Winkel auch auf deren Ergänzungen zu 4R resp. zur ganzen Peripherie bezieht, erhellt aus obigen Beispielen und Beweisen, denn dieselbe Parallele (zur Sehne) giebt in ihrer Länge vom Centrum bis zur inneren resp. äusseren Conchoide die Drittelbogensehne des betreffenden hohlen resp. erhabenen Winkels an.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, ob nicht dennoch eine andere Curve oder Lösungsmethode für die Trisection durch geometrische Construction gefunden werden könne oder schon existire, welche mit gleichem oder grösserem Rechte als die Conchoide auf circularer Basis ausschliesslich wahr und vollkommen genannt zu werden verdiene.

Darauf antworten wir, dass die Richtigkeit unserer obigen Behauptung sich noch durch folgende kurze Darstellung beweisen lasse:

Wie oben schon dargethan*), ist $CK = AY$ (Figur 5) und $KX = YI$. Daraus folgt unmittelbar, dass die beiden Sehnenpunkte Y und I genau dieselben geometrischen Oerter beschreiben wie K und X: I nämlich einen Kreis und Y die Conchoide; beide umschliesen eine eigenthümliche Area ($CKFX$),

*) Vergl. Seite 12 (Figur 2): $CK = AO$ und $KH = NM = \frac{X}{2}$.

welche durch ihre Querschnitte (KX)*) die Hälfte des variablen Sehnen-Mittelstückes nach Lage und Länge, im Zu- und Abnehmen veranschaulicht.

Versetzt man demgemäss den Scheitel des zu trisecirenden Winkels von dem Centrum der Kreisbasis in den Pol der Conchoide, so, dass sich die Sehne des betreffenden Bogens mit der oben erwähnten Parallelen deckt,

oder construirt man, (Figur 5 punktirte Curve) die Conchoide so, dass ihr Pol im Scheitel des Winkels liegt, so ist in dem Durchschnittspunkte der Sehne und der inneren Conchoide in Y derjenige Punkt direct gegeben, welcher mit C und dem Bogendrittelpunkt E in gerader Linie liegt.**)

Diese Abkürzung der Construction beruht natürlich auf dem oben ausführlich angegebenen Lösungswege, weist aber überzeugend nach, dass der fragliche Sehnenpunkt Y, d. i. der eigentliche Trisectionspunkt, bei seinem durch das Wachsen eines Winkels bedingten Fortschreiten unsere Conchoide selbst beschreibt.

Man kann also auf Grund der oben ausgeführten Constructionen und Beweise die praktische Lösung in der eben angedeuteten Weise auf kürzestem und einfachstem Wege erreichen.

Damit ist aber nachgewiesen, dass die Lösung durch die Conchoide auf circularer Basis die natürlich gebotene und ausschliesslich wahre sei, darum auch unsre Curve den Namen der Trisections-Curve κατ' ἐξοχήν mit Recht verdiene.

Es folgt nunmehr die Beschreibung eines vom Verfasser ersonnenen Instrumentes, welches die mechanische Darstellung der Conchoide auf circularer Basis zum Zweck der Trisection leicht und correct zu Stande bringt.

---

*) Bei 105° am längsten; vergl. Seite 10 Anmerk.**) u. Figur 6.

**) In Figur 5 ist noch eine Trisection auf diesem abgekürzten Wege ausgeführt, und zwar die des erhabenen Winkels ACB, dessen Sehne: AB die äussere (punktirte) Conchoide in K''' schneidet. AK''' muss daher $= AM = MN = NB$, also auch $= CL$ sein. (Vergl. Behauptung auf Seite 19.)

Beschreibung des Trisections-Curven-Zirkels.

Aus der Construction und dem Beweise der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis ging hervor, dass derjenige Punkt K in der zur jedesmaligen Sehne des zu trisecirenden Winkels Parallelen, welcher vom Centrum der Kreisbasis genau um eine Drittelbogensehne entfernt ist, bei stetem Wachsen des Winkels oder Bogens die innere und äussere Conchoide nach einander beschreibt und schliesslich in den Anfang wieder zurückkehrt. Auf diesem Wege, seinem geometrischen Orte, befindet sich K stets mit dem Pol F und demjenigen Peripheriepunkte der Kreisbasis, welcher das zweite Drittel des bezüglichen Bogens von dem dritten scheidet, in einer geraden Linie. (Vgl. oben S. 19: $F - K - D$, $L - F - N$).

Den genannten geometrischen Ort mechanisch correct zu beschreiben, dazu dient folgende einfache Vorrichtung (Figur 4):

Zwei schmale Lineale*) von gleicher Länge (32 Centimeter) liegen parallel neben einander, so dass sie einen gleichmässig engen Schlitz bilden, welcher an beiden Enden durch Querverbindungen geschlossen ist.

Dieses Doppellineal ist dadurch in vier gleiche Abschnitte getheilt, dass der erste vom zweiten und der dritte vom vierten durch eingesetzte Zeichenstifte K und Q (in eingelötheten**) Metallhülsen), die mittleren beiden aber durch einen Metallniet D getrennt sind, an welchem das Ende eines einfachen Lineals von der Länge eines Viertheiles des grösseren (also 8 Centimeter) drehbar angebracht und dessen anderes Ende C mittelst eines drehbaren Seitenstückes G schwebend über dem Centrum der Kreisbasis gehalten wird. Der Radius des Kreises muss natürlich mit dem kürzeren Lineal gleiche Dimension haben, so dass

*) aus Messing.

**) Können auch nur eingeschraubt und verstellbar sein; in letzterem Falle lässt sich das Instrument zur Herstellung von Conchoiden mit beliebigem Intervall verwenden.

sich der Niet D stets genau über der Peripherie befindet. Der lange Arm stellt die Gerade vom Pol der Conchoide zum jedesmaligen Zweidrittelbogenpunkt, der kurze den Radius dar, welcher eine Seite des betreffenden gleichschenkligen Dreiecks (vgl. Anmerk. auf S. 17) bildet.

Im Endpunkt des Kreisdurchmessers, in F, das den Pol der Conchoide bilden soll, wird ein Metallstift, welcher genau die Stärke der Schlitzweite hat, in das Blatt, worauf die Zeichnung entstehen soll, und in die Unterlage (Zeichenbrett) senkrecht eingesetzt. Er dient dazu, dem Doppellineal, innerhalb dessen Schlitz er stehen muss, und dem ganzen Instrumente bei erfolgender Drehung desselben um das Centrum diejenige Verschiebung und Leitung zu geben, welche zur Herstellung der Conchoide nöthig ist.

Handhabung des Instrumentes.

Um nun mittelst dieses Apparates die Trisections-Conchoide zu zeichnen, legt man zunächst den kürzeren Arm DC auf den längeren, so dass das schwebende Centrum C sich genau über dem Stifte K befindet.

Der Hauptarm oder das Doppellineal erhält die Richtung des Kreisdurchmessers, welchen man vorher gezogen (die Kreisbasis ist durch den Zirkel vor Beginn der Construction der Conchoide herzustellen), so dass der Endpunkt desselben*) mit dem eingesetzten Stift F innerhalb des Schlitzes und zwar an dessen Ende sich befindet, während der Zeichenstift K im Centrum des Kreises, und der Zeichenstift Q auf verlängertem Durchmesser, genau um Radiusdimension von der Peripherie entfernt steht.

Das obenerwähnte Seitenstück G befindet sich bei dieser Stellung des Instrumentes auf derjenigen Seite, welche der beabsichtigten Leitung entgegengesetzt ist. Bewegt man nun durch Fortleitung des Hauptarmes, welchen man bei N mit der rechten Hand erfasst, während die Linke durch Druck das Seitenstück unverschiebbar erhält, das Instrument über die Zeichenfläche hin, so rückt der Punkt D auf der Kreislinie vorwärts, während der Zeichenstift K sich unter dem schwebenden Centrum (das dann mittelst einer hindurchzusteckenden Nadel sich so fixiren lässt, dass man das Seitenstück G bei fortgesetzter Thätigkeit des Instrumentes nicht mehr festzuhalten hat, vielmehr beliebig stellen kann, damit es der Drehung des Instrumentes nicht hinderlich werde) hervorbegiebt und die innere Conchoide, der Stift Q aber die äussere zeichnet. Sobald der Stift an den Pol F herangerückt ist, wird er durch Hebung des Hauptarmes über denselben hinweggesetzt, so dass bei weiterer Drehung der Schlitztheil KD, sodann nach abermaligem Uebersetzen der Schlitztheil DQ und endlich, nachdem auch Q

*) des Kreisdurchmessers.

über F gehoben, der Schlitztheil QN an dem Stift F entlang gleitet, bis schliesslich das Ende der so entstandenen Doppelzeichnung je in den Anfang zurückkehrt. Dabei ist leicht ersichtlich, dass der Zeichenstift K die innere Conchoide nur bis F, also nur zur Hälfte, dann aber die äussere Conchoide u. zw. ebenfalls zur Hälfte zeichnet, während der Zeichenstift Q die äussere Conchoide nur bis F, also auch zur Hälfte, dann die Hälfte der inneren zur Darstellung bringt.

Nimmt man den einen oder andern Stift Q oder K aus seiner Hülse, so beschreibt der einzeln übrig bleibende die innere und äussere Conchoide nach einander und zwar dann bei zweimaliger Umdrehung des Instrumentes. Sichere, ruhige Führung, welche durch einige Uebung bald gewonnen wird, ist hier wie bei jedem Apparat, dessen Leistung eine gelungene werden soll, einzige Bedingung.

Das gewählte Grössenverhältniss ist ein derartiges, dass die ganze Zeichnung der Conchoide auf einem gewöhnlichen Bogen Papier recht gut Platz findet.

Ersatzmittel für den Trisections-Curven-Zirkel.

Da die Anwendung des beschriebenen Conchoiden-Zirkels das Vorhandensein dieses Instrumentes voraussetzt, und gleichwohl nicht erwartet werden darf, dass Fachgelehrte oder Lehranstalten für obige Beweisführung ein solches anschaffen werden, da aber andrerseits die Herstellung der Conchoide auf Grund ihrer Gleichung oder durch Massen-Construction eine sehr mühsame und dabei vielfach ungenaue sein wird, so habe ich nach einem bequemen Ausweg gesucht, welcher gleich sicher und leicht zum Ziele führt.

Ueber denselben sei noch Folgendes gesagt:

Wir haben oben gesehen, dass zur Ausführung aller nur denkbaren Trisectionen eigentlich nur die eine (erste) Hälfte der inneren Conchoide erforderlich ist, da man erhabene Winkel nur zu halbiren braucht, um deren Hälfte mittelst der inneren Conchoide zu triseciren.

Wenn man nun eine Hälfte der inneren Conchoide durch einen allerdings aufs genaueste herzustellenden Metallausschnitt in der Weise mit dem Transporteur in Verbindung bringt, dass der äussere Rand des letztern den Halbkreis mit seiner Gradeintheilung, der innere Rand dagegen den erwähnten Conchoiden-Ausschnitt bildet, so bedarf man zum Beweise des Lehrsatzes von der Trisection nur dieses einfachen Hilfsmittels für correcte Herstellung des betreffenden Curventheiles. (Figur 6.)

Damit man aber auch die vollständige innere und äussere Conchoide, und zwar viel leichter und schneller als mit dem Instrumente herstellen könne, habe ich auf einer Messingplatte eine halbe äussere und die von ihr umschlossene halbe innere Conchoide eingezeichnet und darnach ausschneiden lassen, so dass ich mit einem fein gespitzten Bleistift um die so geformte Platte herumfahrend die genaueste Zeichnung erhalte; kehre ich die Platte um und lege sie sorgfältig an die andere Seite der

Abscissenaxe an, so wird durch ein nochmaliges Umfahren mit dem Bleistift die ganze Conchoide vervollständigt.

Derartige Zeichnungen lassen sich natürlich auch mittelst der Platte direct*) auf den Lithographir-Stein bringen, so dass die Abdrücke dieselbe Genauigkeit haben wie das Original**) und für Zwecke des Unterrichts oder Selbststudiums vollkommen geeignet sind.

---

*) ohne nachbildende Uebertragung, die immer, zumal bei mathematischen Zeichnungen, ihre Mängel hat .

**) d. i. die Platte.

Anhang.

Folgende Aufgaben, so leicht sie erscheinen mögen, sind geometrisch nur mittelst des Problems der Trisection zu lösen:

1) Die beiden Schenkel eines spitzen Winkels durch eine Gerade so zu schneiden, dass der eine der beiden Aussenwinkel des dadurch entstandenen Dreiecks noch einmal so gross ist als der andere.

2) In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck ein gleichschenkliges zu errichten, dessen Scheitel ein Endpunkt der Hypotenuse ist, der eine der gleichen Schenkel in der Hypotenuse, der Endpunkt des andern aber in der dem Scheitel gegenüberliegenden Kathete gelegen, und dessen Höhe gleich der anliegenden Kathete ist.

3) In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck ein gleichschenkliges zu errichten, dessen Scheitel ein Endpunkt der Hypotenuse ist, der eine der gleichen Schenkel in der Hypotenuse, der Endpunkt des andern aber in der dem Scheitel gegenüberliegenden Kathete gelegen, so dass das Product der ganzen Hypotenuse und der Differenz zwischen ihr und der in ihr liegenden Seite des gleichschenkligen Dreiecks gleich ist dem Quadrat des anliegenden Stückes der getheilten Kathete.

Diese Aufgabe kann auch, wie folgt, abgefasst werden:

In der Hypotenuse und in einer Kathete eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks soll je ein Punkt gesucht werden, dass durch deren beider Lage folgendes Verhältniss sich ergiebt: das Product der Hypotenuse und desjenigen ihrer beiden Stücke, welches der getheilten Kathete anliegt, soll gleich dem Quadrat desjenigen Stückes der getheilten Kathete sein, welches der Hypotenuse anliegt.

4) Auf der Sehne AB eines Bogens von einem Endpunkt derselben aus ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, dessen Basis in der Sehne, dessen Spitze im Bogen liegt, dessen gleiche Schenkel je dem Sehnenstück gleich sind, welches die Basis des Dreiecks übrig lässt.

5) Schlägt man zu einem beliebigen Winkel unter 2R den Bogen (mit beliebigem Radius), zieht dazu die Sehne und schlägt über einem Schenkel des Winkels einen Halbkreis (dessen Durchmesser also gleich jenem Radius), so muss derselbe offenbar durch den Halbirungspunkt der Sehne gehen. (Warum?) Man suche in demjenigen Theile des Halbkreises, welcher zwischen Bogen und Sehne liegt, einen Punkt, welcher auf einer vom Scheitel des Winkels gezogenen Geraden von der Sehne und dem Bogen gleichweit entfernt ist.

6) Ein beliebiger Tangentialwinkel werde halbirt; es ist an den Kreis eine dritte Tangente zu ziehen, welche den einen Schenkel des Tangentialwinkels und die Halbirungslinie so schneidet, dass die beiden Schnittpunkte gleichweit vom Centrum entfernt sind.

Zum Schluss finde die Lösung einer der vorstehenden Aufgaben Platz und zwar derjenigen unter Nr. 5: (Figur 7.)

Der beliebige hohle Winkel sei ACB, dessen Bogen und Sehne AB; über dem Schenkel CA wird ein Halbkreis geschlagen.

Halbirt man den Winkel durch CD, so wird dadurch die Sehne in E senkrecht geschnitten. Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks CEA ist der Durchmesser CA des Halbkreises, folglich liegt der Scheitel des rechten Winkels, d. i. der Halbirungspunkt der Sehne im Halbkreise.

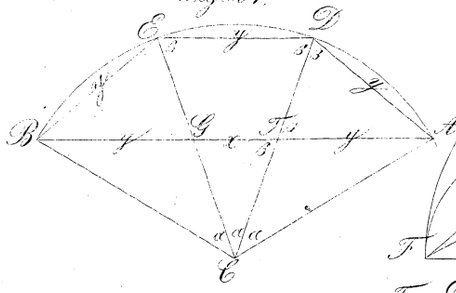
Um nachzuweisen, dass die in der Aufgabe gestellte Forderung gleichbedeutend ist mit der Lösung des Problems der Trisection und wiederum ohne diese geometrisch nicht zu lösen ist, nehmen wir an, dass der Winkel ACB in F und G bereits trisecirt sei. Wir ziehen die Radien CF und CG, ferner die Drittelbogensehnen $AF = FG = GB$, benennen die Durchschnittspunkte der Sehne K und I. Wir wissen, dass das äussere Sehnenstück gleich der Drittelbogensehne ist, also $AK = AF$; folglich ist das Dreieck AKF ein gleichschenkliges. Seine Basis KF ist von dem Halbkreise in H durchschnitten. Verbinden wir H mit der Dreiecksspitze A, so steht AH senkrecht auf FK, denn FK liegt mit C in einer geraden Linie, weil der Radius CF die Sehne AB in K schneidet, und das Dreieck CHA ist ein rechtwinkliges, weil es zur Basis den Durchmesser des Halbkreises und seine Spitze in der Peripherie hat.

Steht aber AH senkrecht auf CH, also auch auf KF als auf der Basis des gleichschenkligen Dreiecks, so ist dies nur im Halbirungspunkt der Basis möglich, darum $KH = HF$.

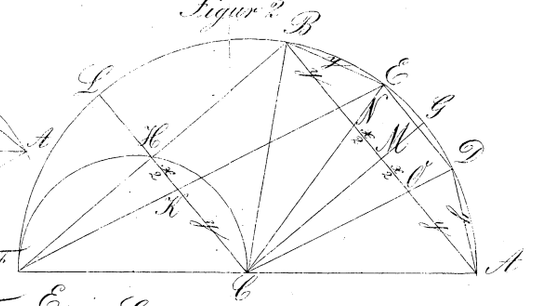
H ist also nach Bedingung der Aufgabe derjenige Punkt des zwischen der Sehne und dem Bogen AB liegenden Theiles des Halbkreises, welcher auf der vom Scheitel des Winkels C gezogenen Geraden CF von der Sehne und dem Bogen gleichweit entfernt ist.

Wir haben bei Lösung dieser Aufgabe die Trisection des Winkels ACB also zur Voraussetzung gemacht.

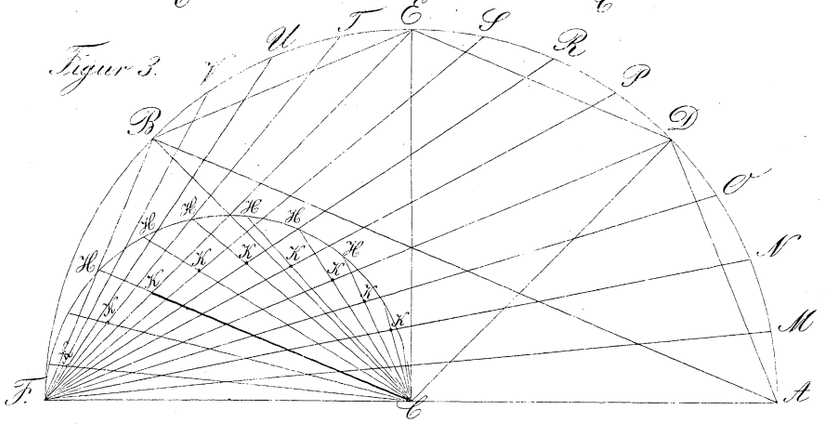
Figur 1.



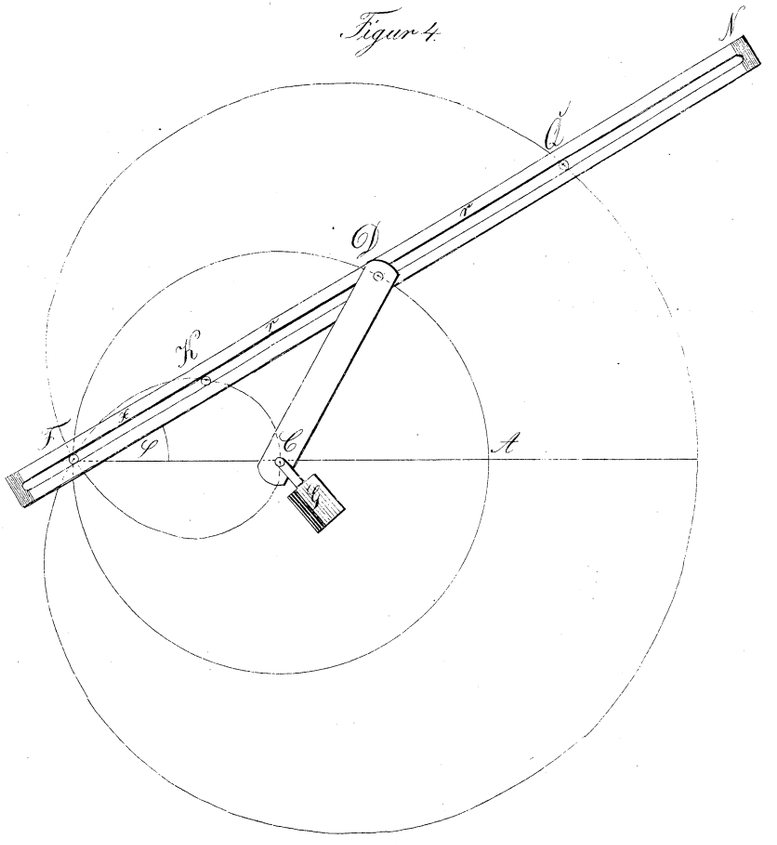
Figur 2.



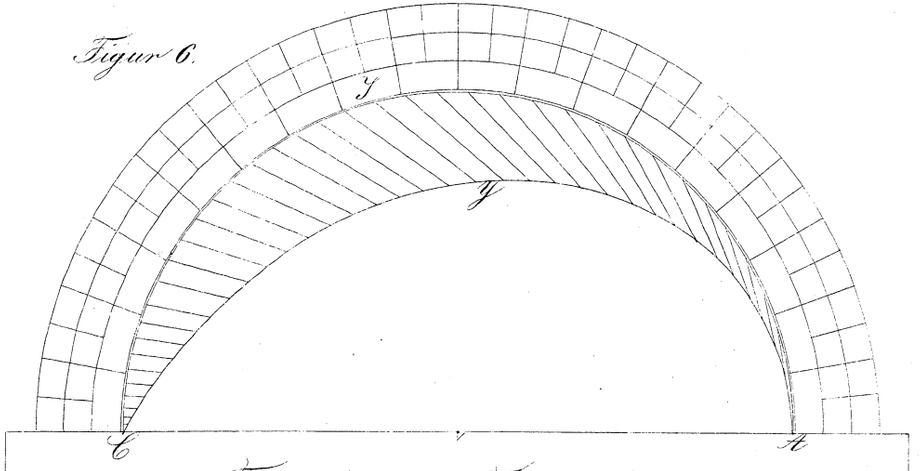
Figur 3.



Figur 4.

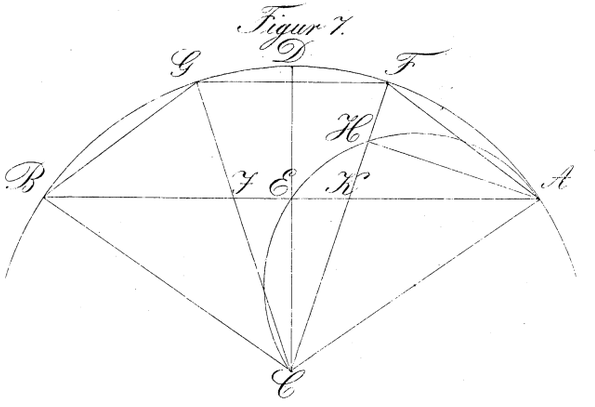
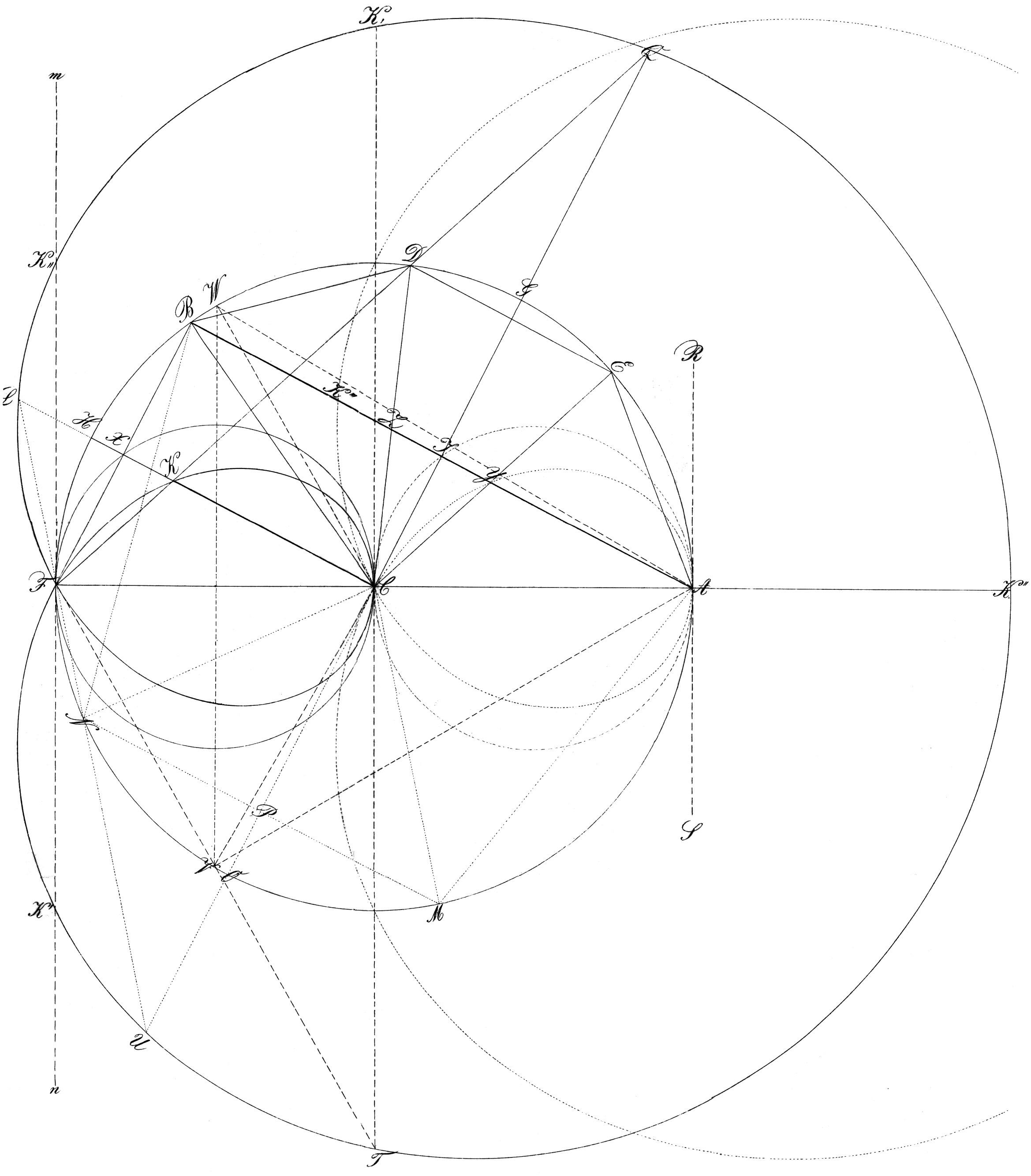


Figur 6.



Transporteur mit Trisections-Curve.

Figur 7.



Figur 5.